MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Amérique du Nord

Mercredi 18 mars

Séries autres que S

Le sujet comporte cinq pages

Les objets calculatrices sont autorisés, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

L'épreuve comporte quatre exercices, tous à traiter dans le temps imparti. Il est conseillé de ne pas en privilégier trop fortement un sur les autres.

Durée de la composition : 4 heures

Sauf cas de force majeure, aucun candidat n'est autorisé à quitter définitivement la salle de composition avant 9 h (San Francisco), 10 h (Calgary), 11h (Houston), 12 h (Montréal, New York, Ottawa, Washington).

En cas de force majeure, un candidat qui quitterait la salle avant ces échéances doit rendre sa copie, son exemplaire du sujet et ses feuilles de brouillon.

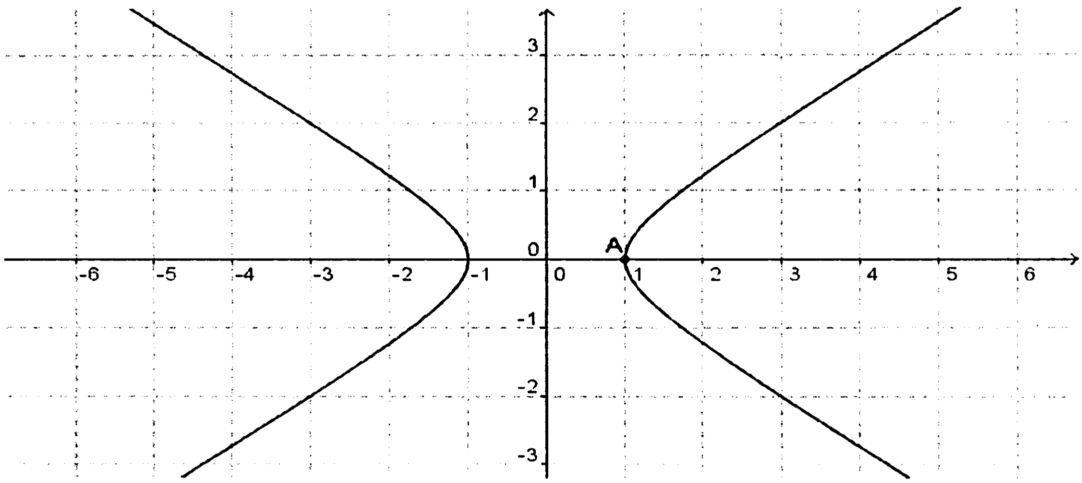
Exercice numéro 1

(proposé par le jury national)

Délicieux mais … équilibré ?

PARTIE A

Ci-dessous est représenté dans un repère l'ensemble des points dont le couple (x, y) de coordonnées vérifie la relation $x^2 - 2y^2 = 1$. On s'intéresse plus particulièrement aux points de cette courbe dont les coordonnées sont des entiers comme par exemple le point A dont le couple de coordonnées est $(1, 0)$.



1. Donner cinq autres couples d'entiers (x, y) tels que $x^2 - 2y^2 = 1$.

2. Soit a et b des entiers naturels. On pose $A = a + 2b$ et $B = a + b$.

- **a.** Exprimer $A^2 - 2B^2$ en fonction de $a^2 - 2b^2$.
- **b.** Donner un nouveau couple d'entiers (x, y) solution de l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ tel que $x > 10$.

3.

a. Rédiger un algorithme affichant le premier couple d'entiers (x, y) solution de l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ et tel que $x > 2\,015$.

b. Quel est le couple obtenu ?

PARTIE B

On rappelle l'égalité valable pour tout entier naturel non nul n : $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. On dit qu'un entier naturel n strictement supérieur à 3 est *délicieux* s'il existe un entier k compris entre 1 et n tel que :

$$1 + 2 + \ldots + (k-1) = (k+1) + (k+2) + \ldots + n.$$

- ***a.*** Trouver le plus petit entier *délicieux* (on pourra remarquer que $n^2 + n = \frac{(2n+1)^2-1}{4}$).
- ***b.*** Trouver un entier *délicieux* supérieur à 1007.

2. On dit qu'un entier naturel n est *équilibré* s'il existe un entier p compris entre 1 et n tel que :

$$1 + 2 + \ldots + p = (p+1) + (p+2) + \ldots + n.$$

- ***a.*** Trouver le plus petit entier *équilibré*.
- ***b.*** Trouver un entier *équilibré* supérieur à 1007.

3. Existe-t-il des entiers à la fois *délicieux* et *équilibrés* ?

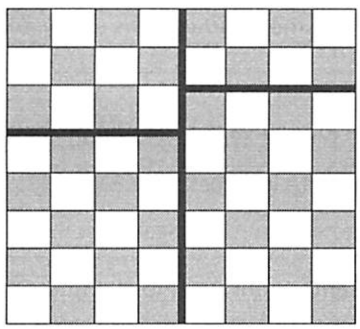
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Exercice numéro 2

(proposé par le jury national)

Découpage d'un échiquier

On dispose d'un échiquier standard 8 x 8 dont les cases (chacune représente une unité d'aire) sont, sur chaque ligne et chaque colonne, alternativement noires et blanches.
On désire partager cet échiquier en rectangles, chacun composé d'un certain nombre de cases en respectant de plus les deux contraintes suivantes : chaque rectangle doit comporter autant de cases blanches que de cases noires et les aires de tous les rectangles doivent être différentes.
L'exemple ci-dessous montre un tel découpage avec quatre rectangles.



Le but est de déterminer la valeur maximale du nombre de rectangles que l'on peut ainsi construire et de préciser dans chaque cas rencontré un partage possible.

1. Proposer un exemple de découpage avec 5 rectangles, respectant ces contraintes.

On note n le nombre de rectangles d'un découpage et a_1, a_2, ..., a_n le nombre de cases blanches de ces différents rectangles.

2. Prouver que l'aire de chaque rectangle est toujours paire.

3. Justifier que les a_i sont tous différents et que $a_1 + a_2 + ... + a_n = 32$.

On peut donc supposer que les a_i sont classés, donc que l'on a : $a_1 < a_2 < ... < a_n$

4. Prouver que $1 \leq n \leq 7$.

On suppose désormais que $n = 7$.

5. Justifier que $7 \leq a_7 \leq 10$.

6. a. Prouver que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ et $a_3 = 3$.

b. Prouver que le cas $a_7 = 7$ est impossible.

7. Déterminer les valeurs de a_4, a_5, a_6 et a_7 qui sont envisageables et présenter les résultats dans un tableau.

8. Proposer pour tous les cas possibles un découpage et répondre au problème posé.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Exercice numéro 3

(proposé par le jury académique)

Le virus

Les habitants d'un petit village de montagne sont touchés par un virus peu dangereux (la guérison est très rapide), mais contagieux. On suppose que la propagation de ce virus suit le schéma suivant :

- Tout individu qui contracte le virus un jour tombe malade le même jour, mais est systématiquement guéri le jour suivant.
- Tout individu en bonne santé un jour, contracte le virus le jour suivant avec une probabilité de 60%.
- Aucun individu n'est immunisé, même en ayant déjà contracté le virus

Mathix arrive dans ce village, un dimanche soir, en bonne santé, pour un séjour d'une semaine.

1. Quelle est la probabilité que Mathix soit malade tous les jours de la semaine ?

2. Quelle est la probabilité qu'il soit malade le mercredi ?

3. Quelle est la probabilité qu'il ne tombe pas malade au cours de la semaine ?

4. Quelle est la probabilité qu'il soit malade trois jours dans la semaine ?

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Exercice numéro 4

(proposé par le jury académique)

La montre

Léa a reçu pour ses étrennes le 1er janvier 2015 une montre avec un dateur qui indique le numéro du jour dans le mois.

Elle est déçue de constater le 1er mars que la montre n'a pas affiché « 1 » comme attendu, mais « 29 ».

En fait, ce dateur ne tient pas compte de la longueur variable des mois et pour son calendrier simple, tous les mois ont 31 jours.

On suppose dans la suite que Léa n'effectue aucune correction sur le dateur.

1. Quel nombre affichera le dateur le 1er mars 2016 ?

2. Quand, pour la première fois après le 1er mars 2015, la montre affichera-t-elle une date correcte ?