OLYMPIADES 6 : arithmétique

Problème 1 (série S)

On part du nombre 5 et on s'autorise à utiliser deux opérateurs :

- L'opérateur (M) « multiplier par 2 » : $n \longmapsto 2 \times n$
- L'opérateur (R) « retrancher 3 » : $n \longmapsto$ n–3

Un entier naturel N est dit admissible s'il est possible, en partant de 5 et en n'utilisant que les deux opérateurs ci-dessus, de parvenir en un certain nombre d'étapes au nombre N.

Par exemple 25 est admissible par le chemin à cinq étapes :

$$5 \xrightarrow{\text{M}} 10 \xrightarrow{\text{R}} 7 \xrightarrow{\text{M}} 14 \xrightarrow{\text{M}} 28 \xrightarrow{\text{R}} 25$$

On considérera par convention que 5 est admissible (chemin avec 0 étape)

1. Quels sont les entiers naturels admissibles en au plus 3 étapes ?
2. Montrer que 11, 13, 16 et 19 sont aussi admissibles.
3. Certains entiers naturels sont non admissibles : lesquels ? Justifier.
4. Montrer que 2 009 est admissible en présentant une méthode permettant de trouver le chemin menant de 5 à 2 009 (une telle méthode est aussi appelée *algorithme*).

Problème 2 (série S)

Tous les nombres considérés sont des nombres entiers naturels non nuls.

A

1. Peut-on trouver deux nombres entiers naturels dont la somme et le produit sont égaux à 4 ?
2. Peut-on trouver deux nombres entiers naturels dont la somme et le produit sont égaux à 2 009 ?
3. La somme de deux entiers naturels x et y, avec $0 < x \leqslant y$, est égale à leur produit.

   Combien y a-t-il de solutions distinctes $(x,\ y)$?

B

La somme de trois entiers naturels x, y et z, avec $0 < x \leqslant y \leqslant z$, est égale à leur produit.

1. Montrer que $xy \leqslant 3$.
2. Combien y a-t-il de solutions distinctes $(x,\ y,\ z)$?

C

La somme de cinq entiers naturels x, y, z, u et v, avec $0 < x \leqslant y \leqslant z \leqslant u \leqslant v$, est égale à leur produit.

Combien y a-t-il de solutions possibles $(x,\ y,\ z,\ u,\ v)$?