Corrigé de l'exercice I.

1. Le nombre 384957 est un nombre premier pair, mais n'est pas impair, car $8 > 4$.

2. Ce sont les nombres qui sont constitués que du même chiffre. En effet, deux chiffres consécutifs a et b doivent vérifier $a \leqslant b$ et $a \geqslant b$, donc $a = b$.

3. Les nombres de deux chiffres qui sont des grands pairs sont : 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 55, 56, 57, 58, 59, 66, 67, 68, 69, 77, 78, 79, 88, 89, 99. Il y en a 45.

Les nombres de deux chiffres qui sont des grands pairs sont : 10, 11, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 40, 41, 42, 43, 44, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99. Il y en a 54.

Il y a donc plus d'entiers grands impairs que d'entiers grands pairs.

4. **a.** $3021 = 2000 + 1021$, c'est donc bien la somme de deux entiers grands impairs.

b. $3021 = 1509 + 1512$, c'est donc bien la somme de deux entiers grands pairs.

5. $N = a_1 a_2 \cdots a_n = a_1 0 a_3 0 \cdots b + a_2 0 a_4 0 \cdot c$ avec $b = 0$ si n est pair, a_n sinon et $c = a_n$ si n est pair et 0 sinon. N est bien la somme de deux grands impairs. On peut écrire tous les nombres de 1 chiffre, sous la forme de $1 + n - 1$, sauf, $n = 1$.

6. Soit $n > 1$ un grand impair inférieur à 100. Si n est un nombre de 1 chiffre, alors c'est la somme de 2 grand pairs. Si $n \geqslant 10$, alors $n = 10a + b$ avec $a \geqslant b$. $n = (10(a-1) + a) + (10 + b - a)$. Le premier nombre est bien un grand pair, et le deuxième n'a qu'un chiffre donc est aussi grand pair.

7. Il faut chercher plus grand que 100. Mais $100 = 99 + 1$, $101 = 99 + 2$, $\dots 108 = 99 + 9$, donc ces nombres sont la somme de 2 grands pairs.

Pour 109. Supposons que $109 = 10a + b + 10c + d$, avec $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant 9$ et $1 \leqslant c \leqslant d \leqslant 9$.

$b + c = 9$ grâce à un tableau à double entrée. Il n'y a donc pas de retenue.

$10(a + b) = 100$, donc $a + b = 10$. Soit, $1 \leqslant a \leqslant 9 - d \leqslant 8$ et $1 \leqslant 10 - a \leqslant d \leqslant 8$. Ces deux inégalités s'excluent l'une et l'autre.

Donc, 109 est la valeur chérchée.

8. On obtient le proogramme suivant.

Exercice national, les grands pairs…

```
nb = 6
N = 324957
T = []
for c in str(N):
    T.append(int(c))

r = 1
i = 1
while (r == 1) and (i <= nb) :
    if i == nb or i == nb -1 :
        r = 1
    else :
        if T[i-1] <= T[i] and T[i+1] <= T[i]:
            r = 1
        else :
            r = 0
    i = i + 2

print(r)
```

Corrigé de l'exercice I.

1. On obtient la figure 1. Le mot obtenu est $CHVHCHVH$.

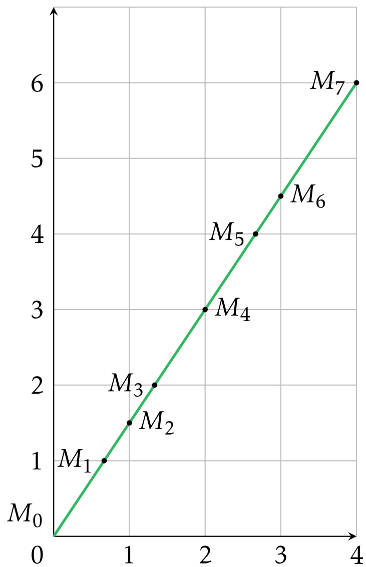


FIGURE 1 – *Motif* $CHVHCHVH$

2. Les mots associés commencent tous par C car la droite passe par le point de coordonnées $(0\,;0)$.

3. Le mot passe par les points de coordonnées $(0;0)$ et $(3,1)$. C'est donc la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x$, voir la figure 2.

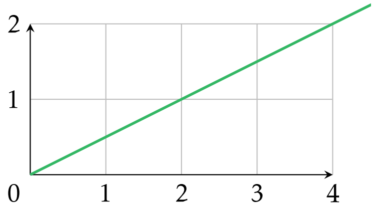


FIGURE 2 – *Droite d'équation* $y = \frac{1}{3}x$.

4. **a.** Si on rencontre le motif VV, alors la droite d'équation $y = ax$ coupe deux verticales consécutives $x = n$ et $x = n+1$, entre deux horizontales consécutives d'équation $y = p$ et $y = p+1$. La pente est donc forcément inférieure $p+1-p = 1$.

b. Situation symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$. Donc la pente est supérie à 1.

c. Le mot qui commence par $CVVC$ détermine la droite d'équation $y\frac{1}{3}x$. Donc, il ne peut pas y avoir de droite qui commence par $CVVCH$.

5. Commme le mot est de période 6, le point M_6 a des coordonnées entières.

- Le point est en $(6;0)$, impossible le motif est alors de période 1 ;
- le point est en $(6;1)$, ce la correspond au motif $CVVVVV$.
- le point est en $(6;2)$, impossible, motif périodique de période 3.
- le point est en $(5;2)$, le motif est alors $CVVHVV$.
- le point est en $(4;3)$, le motif est alors $CVHCHV$.
- le point est en $(3;4)$, le motif est alors $CHVHVH$.
- le point est en $(2;5)$, le motif est alors $CHHVHHV$.
- le point est en $(1;6)$, le motif est alors $CHHHHHH$.

6. Pour que le mot associé soit périodique, il faut qu'il passe par un point de coordonnées entières. Soit $(a;b)$. La droite a donc pour équation $y = \frac{b}{a}x$.

Réciproquement, une droite a pour équation $y = \frac{b}{a}x$ avec a et b des entiers, alors la droite passe au point de coordonnées $(a;b)$ et donc le motif est périodique.

7. La droite d'équation $y = \frac{1}{p}x$ donne un motif périodique de période p.

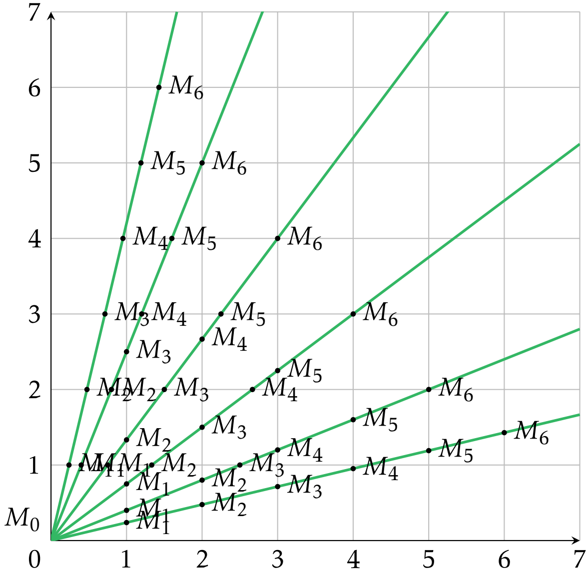


FIGURE 3 – *Motif CHVHCHVH*

8. Les points sur la droite $y = \sqrt{2}x$ sont soit des V soit des C. Mais comme $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, la droite ne passe jamais par un point à coordonnées entières. C'est donc forcément des V.

Les points associés à H sont les points $(x\,;y)$ pour lesquels il existe un entier m tel que $y = m$, $x = \dfrac{m}{\sqrt{2}}$ et $\dfrac{m}{\sqrt{2}} < n$. Leur nombre est égal au plus grand entier inférieur à $n\sqrt{2}$. Cela donne $n\sqrt{2} - 1 \leqslant F_W(n) \leqslant n\sqrt{2}$. Donc la limite de $\dfrac{F_W(n)}{n}$ existe et vaut $\sqrt{2}$.

☐ Corrigé de l'exercice I.2.

Somme de carrés

1. L'aire du rectangle est $(5+4+3+2+1)\times(2\times5+1)$. Mais c'est aussi la somme des différents rectangles du puzzle.

$$\begin{aligned}(5+4+3+2+1)\times(2\times5+1) &= 2\times5^2+2\times4^2+2\times3^2+2\times2^2+2\times1^2+5\times5+4\times\\ &= 3\times5^2+3\times4^2+2\times3^2+3\times2^2+3\times1^2\end{aligned}$$

Soit :

$$S(5) = \frac{1}{3}(5+4+3+2+1)\times(2\times5+1) = \frac{1}{3}\times15\times11 = 55$$

2. **a.** N ou $n+1$ est un multiple de 2. L'un des trois nombres n, $n+1$, ou $2n+1$ est un multiple de 3. Si ni n, ni $n+1$ ne sont des multiples de 3, alors $n+2$ est un multiple de 3, soit $n+2=3k$, donc $n=3k-2$, et donc $2(3k-2)+1=6k-3$, donc, $2k-1$ est multiple de 3.

   b. On a :

$$\begin{aligned}S(n)+(n+1)^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2\\ &= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+n+6n+6)\end{aligned}$$

Or $(n+2)(2n+3)=2n^2+7n+6$, on en déduit que

$$S(n+1)=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$

3. $S(24)=\frac{1}{6}\times 24\times 25\times 49=4\times 25\times 49=4900=70^2$.

Additionner sur une courbe

4. **a.** $S(1)=1$, donc $(1\,;1)$ appartient à (E). $(24;70)$ appartient à (E) d'après la question précédente. 0 et -1 appartiennent à (E). Pour $x=2$, on $S(2)=5$, donc $\left(2;\sqrt{5}\right)$ et $\left(2;-\sqrt{5}\right)$ appartien à (E).

   b. $(-2\,;1)$ n'appartient pas à (E), car $S(-2)=-1$, et il n'y a pas de nombre y donc le carré vaut -1.
   De même $S\left(-\frac{1}{4}\right)$ est négatif.

   c. L'étude du signe de $S(x)$ donne :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$S(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que pour $x \in \left[-1\,;-\frac{1}{2}\right] \cup [0\,;+\infty[$, les points $\left(x\,;\sqrt{S(x)}\right)$ et $\left(x\,;-\sqrt{S(x)}\right)$ sont éléments de (E).

Il y a deux points pour chaque valeur de x éventuellement double.

5. **a.** Quand x est grand, $x+1 \approx x$ et $2x+1 \approx 2x$, donc $\dfrac{3y^2}{x^3} \approx \dfrac{6x^3}{6x^3} = 1$.

b. La courbe est formée de deux parties symétriques sur l'intervalle $\left[-1\,;-\frac{1}{2}\right]$.
La partie supérieurs, est croissante puis décroissante, on en déduit que la courbe (E) présente une partie fermée.

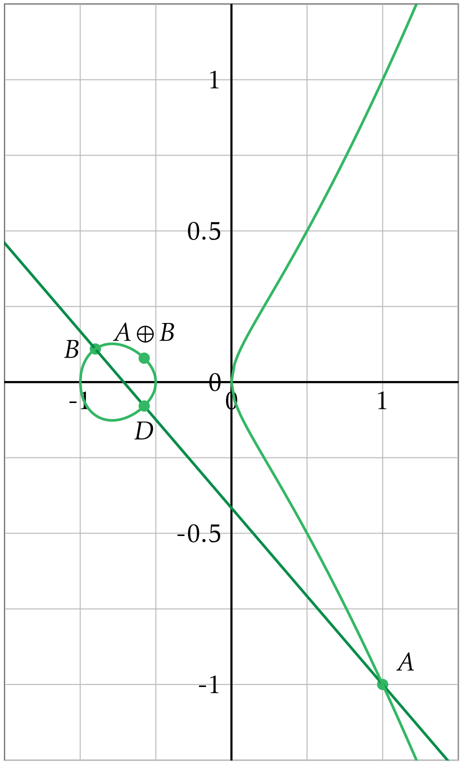
6. Somme de deux points

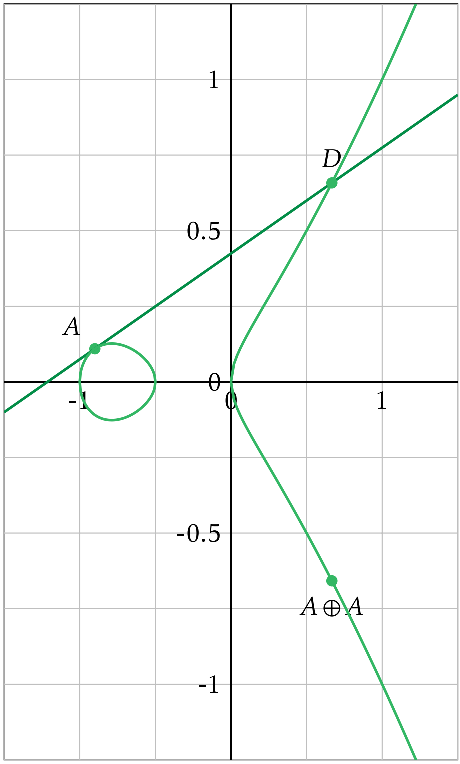
a. Voir la figure 4.

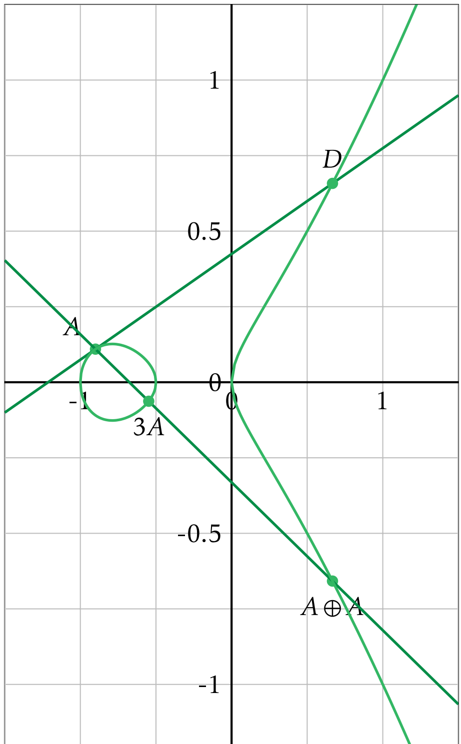
b. Voir la figure 4.

c. Voir la figure 4.

7. Alice donne à Bruno les coordonnées $(0{,}020\,833\,33\,;\,0.06076389)$, qui sont les coordonnées de $2M$. Bruno donne à Alice les coordonnées $(0{,}029\,083\,09\,;\,-0.07265$ qui sont les coordonnées de $5M$. La clef est donc constituée des quatre premières décimales de l'abscisse de $10M$: 5927


1
0.5
0
-0.5
-1
-1
0
1
$A \oplus B$
B
D
A


1
0.5
0
-0.5
-1
-1
0
1
D
A
$A \oplus A$


1
0.5
0
-0.5
-1
-1
0
1
D
A
$3A$
$A \oplus A$