MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Académies de la Guadeloupe, de la Guyane et de la Martinique

CORRIGE

Première Partie : Exercices académiques

Exercice académique 1 : Le problème des ficelles

(À traiter par tous les candidats)

1. **Le modèle**
   a. Avec l'issue {1 – 6 ; 2 – 3 ; 4 – 5}, on obtient une boucle fermée, **elle est donc favorable à la réalisation de S**.
   b. Les deux autres extrémités à nouer sont 4 et 5 : **2 liaisons suffisent donc**.

2. **Le calcul**

a. Les liaisons contenant la liaison « 1-2 » sont : **{1 – 2 ; 3 – 4}, {1 – 2 ; 3 – 5} et {1 – 2 ; 3 – 6}**

b. Comme pour la liaison « 1-2 », il y a 3 liaisons contenant une liaison de départ. **Il y a donc 15 liaisons possibles** (c'est-à-dire 5 fois 3). (*Les issues ne sont pas demandées, mais il est plus simple de tout dénombrer, la dernière colonne n'étant que pour le contrôle*).

1-2	3-4	5-6	1-2	3-5	4-6	1-2	3-6	4-5
1-3	2-4	5-6	1-3	2-5	4-6	1-3	2-6	4-5
1-4	2-3	5-6	1-4	2-5	3-6	1-4	2-6	3-5
1-5	2-3	6-4	1-5	2-4	3-6	1-5	2-6	3-4
1-6	2-3	4-5	1-6	2-4	3-5	1-6	2-5	3-4

c. Une liaison n'est pas favorable quand un nœud provient d'une même ficelle.
Parmi tous ces cas, il y a 8 cas favorables :
{1 – 3 ;2 – 5}, {1 – 3 ; 2 – 6}, {1 – 4 ; 2 – 5}, {1 – 4 ; 2 – 6}, {1 – 5 ; 2 – 3}, {1 – 5 ; 2 – 4}, {1 – 6 ; 2 – 3}, {1 – 6 ; 2 – 4}.
Ainsi $p(S) = \frac{8}{15}$ et $p(\bar{S}) = 1 - p(S) = \frac{7}{15}$

L'événement S est donc le plus probable.

Exercice académique 2 : L'étoile céleste

(À traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Première partie : rectangle d'or

1. Les rectangles EFCB et EFDA sont semblables

donc $\frac{EF}{BE} = \frac{AE}{EF} \Leftrightarrow \frac{\varphi}{1} = \frac{1+\varphi}{\varphi} \Leftrightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0.$

Le nombre φ est donc solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

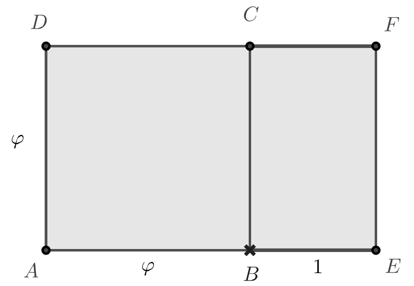


Figure 1 : AEFD et EFCB sont semblables.

2. L'équation admet 2 racines : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

La solution qui convient est la positive donc $\boldsymbol{\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

3. Pour tout agrandissement ou toute réduction de rapport k d'un rectangle d'or, les longueurs du nouveau rectangle sont multipliées par k. On a donc : $\boldsymbol{\frac{L'}{l'} = \frac{kL}{kl} = \frac{L}{l} = \varphi.}$

Donc **tout agrandissement ou réduction d'un rectangle d'or est encore un rectangle d'or**.

4. On a : $BE \times \varphi = 1 \times \varphi = \varphi = AD$ et $EF \times \varphi = \varphi \times \varphi = \varphi^2 = \varphi + 1 = AE$

Donc le rectangle *EFAD* est un agrandissement de rapport φ du rectangle *EFCB*.

Deuxième partie : l'étoile céleste

1. On peut utiliser le théorème de Thalès, les agrandissements ou les homothéties... Par exemple, avec le théorème de Thalès appliqué au triangle AEF, on a :

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BG}{EF} \Leftrightarrow \frac{\varphi}{\varphi+1} = \frac{BG}{\varphi}$$

$$\boldsymbol{BG = \frac{\varphi^2}{\varphi+1} = 1}$$

car $\varphi^2 = \varphi + 1$

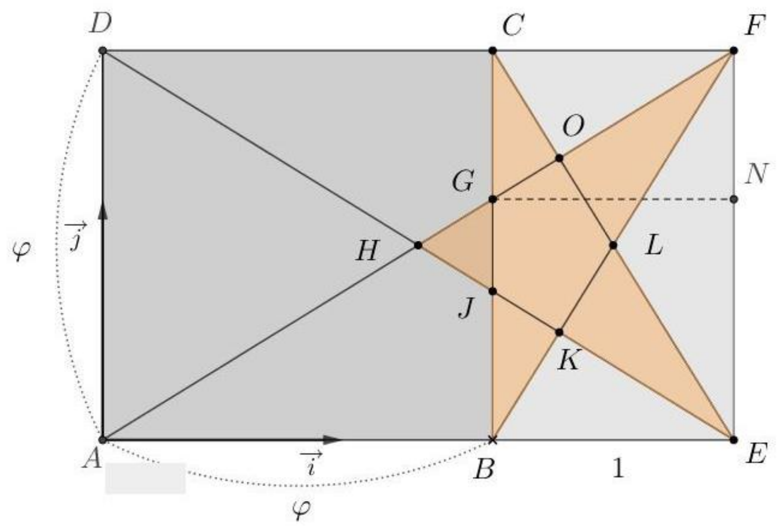


Figure 2 : l'étoile céleste

2. FCGN est un rectangle par construction. De plus,

BG = 1 donc CG = BC – BG = $\varphi - 1$ Ainsi $\boldsymbol{\frac{CF}{CG}} = \frac{1}{\varphi-1} = \frac{\varphi}{\varphi^2-\varphi} = \frac{\varphi}{1} = \boldsymbol{\varphi}$

Donc le rectangle FCGN est un rectangle d'or.

3. Le rectangle *AEFD* est un agrandissement de rapport φ du rectangle *EFCB*. Or dans un agrandissement de rapport φ, toutes les longueurs sont multipliées parφ, entre autres, $AF = \varphi \times CE$

Ou encore : $AF = \sqrt{(1+\varphi)^2 + \varphi^2} = \sqrt{\varphi^4 + \varphi^2}$ car $\varphi^2 = \varphi + 1$; AF = $\sqrt{\varphi^2(\varphi^2+1)} = \varphi\sqrt{1+\varphi^2}$= φCE

On en déduit que $\boldsymbol{\frac{AF}{CE} = \varphi}$

4. Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD})$, on a : $A(0\,;0)$, $F(\varphi+1\,;\,\varphi)$, $C(\varphi\,;\,\varphi)$, et $E(\varphi+1\,;0)$.

Ainsi : $\overrightarrow{AF}\binom{\varphi+1}{\varphi}$ $\overrightarrow{CE}\binom{1}{-\varphi}$ et donc en faisant le produit scalaire $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{CE}=\varphi+1-\varphi^2=0.$

Les droites (AF) et (CE) sont donc perpendiculaires.

5. Le point O est le point d'intersection des droites (AF) et (CE). On détermine une équation réduite de chacune de ces droites : (AF) : $y=\frac{1}{\varphi}\,x$ et (CE) : $y=\,-\varphi x+\,\varphi^3$

On résout le système composé par les deux équations. On obtient alors les coordonnées du point O :

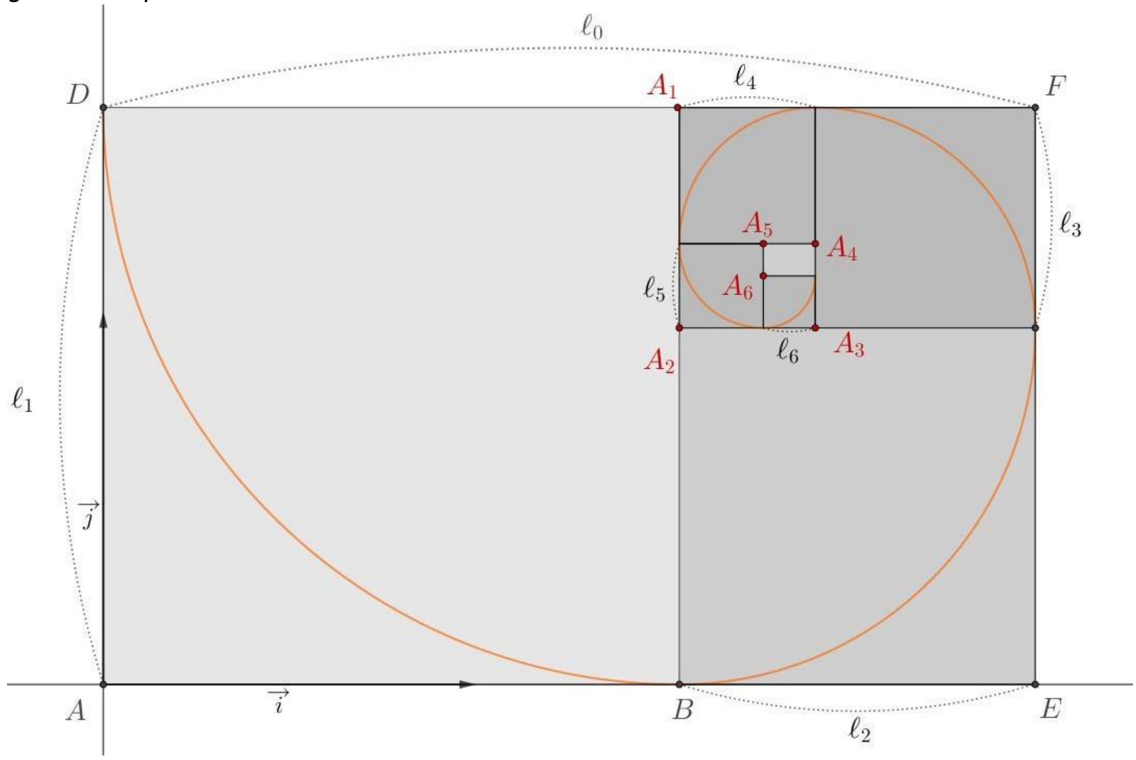
$$\boldsymbol{x_O=\frac{\varphi^4}{1+\varphi^2}}\qquad \textbf{et}\qquad \boldsymbol{y_O=\frac{x}{\varphi}=\frac{\varphi^3}{1+\varphi^2}}$$

<u>Troisième partie : la spirale d'or</u>

1. La longueur suivante s'obtient en divisant la précédente par φ d'où :

$l_{n+1}=\frac{l_n}{\varphi}$ **la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{\varphi}$** et $l_n=l_0\times\frac{1}{\varphi^n}$

2. *Figure 3 : la spirale d'or*



En observant la figure 3, on voit que les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 ont pour coordonnées :

. $A_1\,(l_0-l_2\,;\,l_1)$	. $A_2\,(l_0\,-\,l_2;\;l_1-l_3)$
. $A_3\,(l_0-l_2+l_4\,;\,l_1-l_3)$	. $A_4(l_0\,-\,l_2+l_4;\;l_1-l_3+l_5)$
. $A_5\,(l_0-l_2+l_4-l_6\,;\,l_1-l_3+l_5)$	. $A_6(l_0\,-\,l_2+l_4-l_6;\;l_1-l_3+l_5-l_7)$

On peut conjecturer que : $A_{2n}(l_0-l_2+\cdots+(-1)^n l_{2n}\,;\;\;l_1-l_3+\cdots+(-1)^n l_{2n+1})$

C'est-à-dire : $\boldsymbol{x_{2n}=l_0-l_2+\cdots+(-1)^n l_{2n}}$ **et** $\boldsymbol{y_{2n}=l_1-l_3+\cdots+(-1)^n l_{2n+1}}$

On peut en déduire que $\boldsymbol{y_{2n}=\frac{1}{\varphi}\times x_{2n}}$ car pour tout $k\geq 0,\;l_{2k+1}=\frac{1}{\varphi}\times l_{2k}$

3. *Pas de question*

4. Programmes sous Python permettant d'afficher les 7 ou les N premiers termes de cette suite.

```python
from math import *
phi=(1+sqrt(5))/2
S=0
l_0=1+phi
n=0
while n<7 :
     S=S+l_0/phi**(2*n)*(-1)**n
     print("u",n,"= ",S)
     n=n+1
```

```
from math import*
phi = (1+sqrt(5))/2
u = 0
input N
l_0 = 1+phi
n = 0
while n<N :
      u=u + l_0 / phi**(2*n)*(-1)**n
      print (" u" , n , " = " , u)
      n = n+1
```

5. On remarque que $u_n = x_{2n}$.

On fait donc tourner le programme pour trouver le rang n_0 à partir duquel les coordonnés x_{2n} et y_{2n} du point A_{2n} sont des valeurs approchées respectives des coordonnées x_0 et y_0 du point O à 10^{-2} près.

On obtient les valeurs ci-après :

```
u 0 =  2.618033988749895
u 1 =  1.618033988749895
u 2 =  2.0
u 3 =  1.8541019662496845
u 4 =  1.9098300562505257
u 5 =  1.8885438199983176
u 6 =  1.8966744387541008
u 6 /phi  =  1.1722092687431651
x_0 =  1.8944271909999162
y_0 =  1.170820393249937
>>>
```

On remarque que :

- $u_6 = x_{2\times 6}$ est une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près
- $u_6/\varphi = y_{2\times 6}$ est une valeur approchée de y_0 à 10^{-2} près.

Donc le rang n_0 recherché est : $\boldsymbol{n_0 = 6}$

Exercice académique 3 : Résidus des nombres entiers

(À traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)

1. On détermine dans les tableaux suivants les résidus de 58, 752, 1492 et 1852 :

5	**8**
3	

7	**5**	**2**
2	3	
1		

1	**4**	**9**	**2**
3	5	7	
2	2		
0			

1	**8**	**5**	**2**
7	3	3	
4	0		
4			

2. Deux nombres différents permettant d'obtenir **351** sur la deuxième ligne :

6	**9**	**4**	**3**
3	5	1	

6	**3**	**8**	**7**
3	5	1	

3. Les nombres entiers inférieurs à 100 dont le résidu vaut **5** sont :

5 ; 50 ; 16 ; 61 ; 27 ; 72 ; 38 ; 83 ; 49 ; 94

4. Il y a **dix nombres entiers** strictement inférieurs à 100 dont le résidu vaut **0** :

0 ; 11 ; 22 ; 33 ; 44 ; 55 ; 66 ; 77 ; 88 ; 99

Il y a **dix-huit nombres entiers** strictement inférieurs à 100 dont le résidu vaut **1** :

1 ; 10 ; 21 ; 12 ; 32 ; 23 ; 43 ; 34 ; 54 ; 45 ; 65 ; 56 ; 76 ; 67 ; 87 ; 78 ; 98 ; 89

5. Les nombres entiers inférieurs à 1000 dont le résidu vaut **8** sont :

8 ; 80 ; 19 ; 91 ; 800 ; 880 ; 911 ; 199 ; 109 ; 890 ; 901 ; 991 ; 119

6.

a. Il y a **deux nombres entiers** inférieurs à 100 dont le résidu vaut **9** : **9 et 90**

b. Il y a **quatre nombres entiers** inférieurs à 1000 dont le résidu vaut **9** : **9 ; 90 ; 900 et 990**

c. Le **nombre d'entiers inférieurs à $\mathbf{10^n}$** (n entier naturel non nul) dont le résidu vaut **9** est le nombre $\boldsymbol{u_n = 2^{n-1}}$

$(par\ tatônnements\ \ u_1 = 1\ ;\ \ u_2 = 2\ ;\ \ u_3 = 4\ ; u_4 = 8\ ;\ \ u_5 = 16\ ; \ldots\ldots\ldots, \text{à}\ défaut\ de\ récurrence)$

d. On a : $u_6 = 2^5 = 32\ \ et\ \ u_7 = 2^6 = 64.$ Donc le 50^{e} nombre entier ayant pour résidu 9 est inférieur à 10^7 et supérieur à 10^6. Il a donc **7 chiffres**.

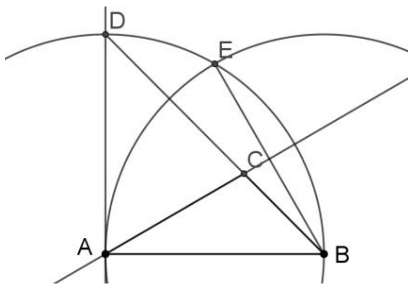
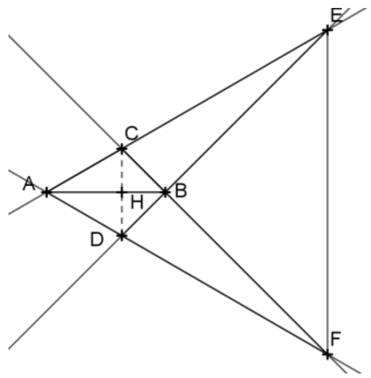
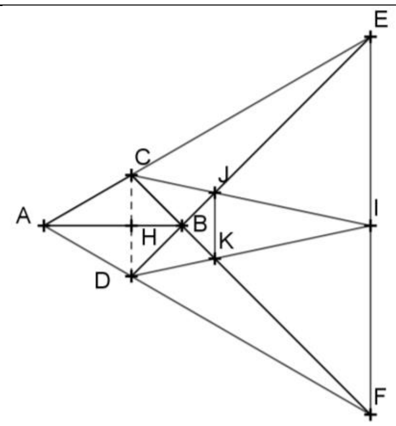
Deuxième Partie : Exercices nationaux

Eléments de correction

Exercice national 1 : L’oiseau et le cerf-volant

(À traiter par tous les candidats)

1. Réalisation de la figure

- Un triangle rectangle isocèle ABx fournit l’angle de 45°, un demi-triangle équilatéral fournit l’angle de 30°	- Obtention des points D, H, E et F	- On achève la figure et on ôte les traits de construction
		

2. Dimensions du cerf-volant ABCD

a. **Le triangle ACD** est isocèle de somment principal A (à cause de la symétrie) et son angle au sommet mesure 2x30°= 60°. Il **est équilatéral**.

Le triangle BCD est isocèle de sommet principal B (la symétrie) et son angle au sommet mesure 2x45° = 90°. Il **est rectangle isocèle.**

b. $\mathrm{AH} = \mathrm{AC}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\mathrm{CH} = \frac{1}{2}\mathrm{AC}$ (triangle équilatéral). Comme $\mathrm{CH} = \mathrm{HB}$ (triangle rectangle isocèle), on en déduit que $\mathrm{AC}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{AC} = \mathrm{AB} = 1$. Par conséquent $\mathbf{AC} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1+\sqrt{3}}}$ et $\mathbf{BC} = \mathbf{CH}\sqrt{\mathbf{2}} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{1+\sqrt{3}}}$.

c. L’aire $\mathcal{A}$ du cerf-volant est $\mathcal{A} = \mathrm{AB} \times \mathrm{CH} = \frac{1}{1+\sqrt{3}}$. Son périmètre est $\mathcal{P} = 2\mathrm{AC} + 2\mathrm{BC} = \frac{4+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$

N.B. Les résultats précédents peuvent être donnés sous une forme différente (par exemple $\mathrm{AC} = \sqrt{3} - 1$) *. L’important est qu’ils soient corrects et correctement amenés.*

3. ***a.*** Les droites (AD) et (CB) étant symétriques des droites (AC) et (BD), respectivement, par rapport à (AB), les points E et F le sont aussi et pour la même raison (mesure des angles) que dans la question **2.** le triangle AEF est équilatéral et le triangle EBF rectangle en B et isocèle.

b. La hauteur AI du triangle équilatéral AEF a pour longueur la somme $\mathrm{AB} + \mathrm{BI}$; $\mathrm{AB} = 1$ et $\mathrm{BI} = \frac{1}{2}\mathrm{EF} = \frac{1}{2}\mathrm{AE}$. On a donc $\mathrm{AE}\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{AE}$, ce qui conduit à $\mathrm{AE} = \sqrt{3} + 1$ et donc $\mathrm{CE} = \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + 1 = 2$;

c. $\mathrm{BE} = \mathrm{EF}\frac{\sqrt{2}}{2}$ et donc $\mathbf{BE} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

4. ***a.*** L'existence du cercle inscrit est due à la propriété rappelée et non démontrée (la symétrie entraîne l'égalité des distances et a fortiori des sommes de distances)

La formule donnant le rayon du cercle inscrit fournit $\boldsymbol{R} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{2}}}$

b. Le point G est sur [AB] puisqu'il est sur les bissectrices des angles du quadrilatère ACBD. Le projeté orthogonal L de G sur [AC] est aussi le point de contact de [AC] avec le cercle inscrit. Donc $\mathrm{GL} = R$ et, comme le triangle AGL est un demi-triangle équilatéral, $\mathbf{AG} = \mathbf{2}\boldsymbol{R} = \mathbf{2} - \sqrt{\mathbf{2}}$**.**

c. Le triangle CHP est rectangle en C, on applique le théorème de Pythagore pour trouver $CP^2 = CH^2 + HP^2$ qui donne finalement $\mathbf{CP} = \sqrt{\mathbf{2}}$.

d. Comme $\mathrm{AP} = 2$, le cercle de centre P de rayon $\sqrt{2}$ coupe (AP) en G.

e. Voir figure plus bas.

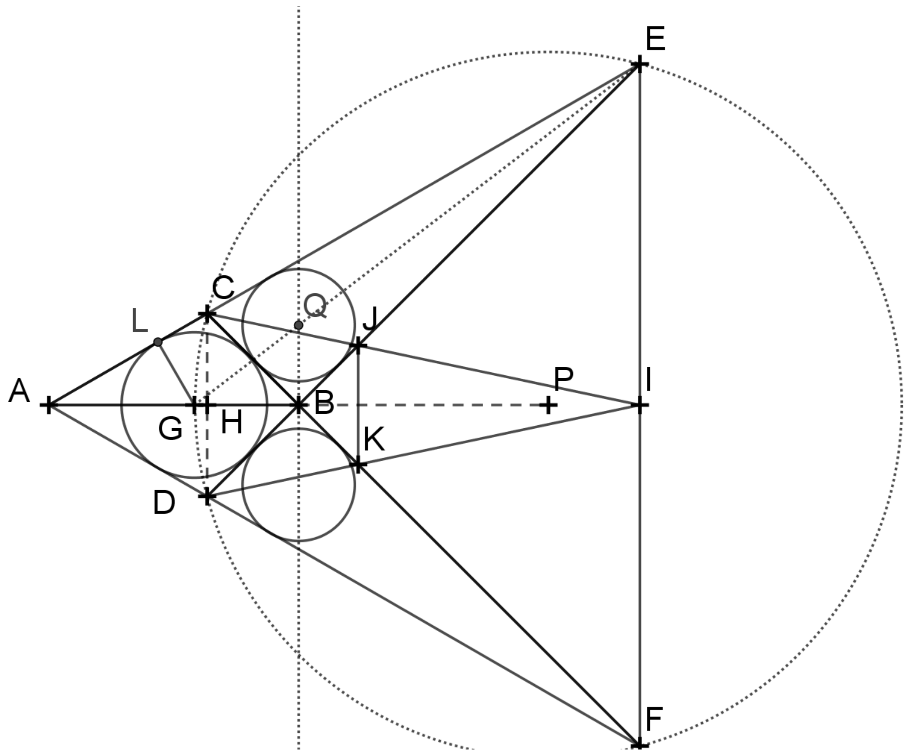
5. ***a.*** L'aire du triangle BCE est donnée par $\frac{1}{2}BC \times BE$. Elle vaut donc $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$.

Le périmètre de ce triangle est, tous calculs faits, $\mathbf{2} + \sqrt{\mathbf{6}}$

b. Le calcul proposé nous permet de déterminer le rayon du cercle inscrit *dans* le triangle BCE : $\boldsymbol{R'} = \frac{\sqrt{\mathbf{6}}-\mathbf{2}}{\mathbf{2}}$

c. Le centre du cercle inscrit *dans* le triangle BCE est le point de concours des bissectrices intérieures de ce triangle. L'une est (GE), car G est équidistant des droites (DE) et (AC), une autre est perpendiculaire à (AB) en B (car (AB) est la bissectrice extérieure de l'angle B du triangle BCE) ; le centre cherché est donc leur point d'intersection.

6. Figure finale

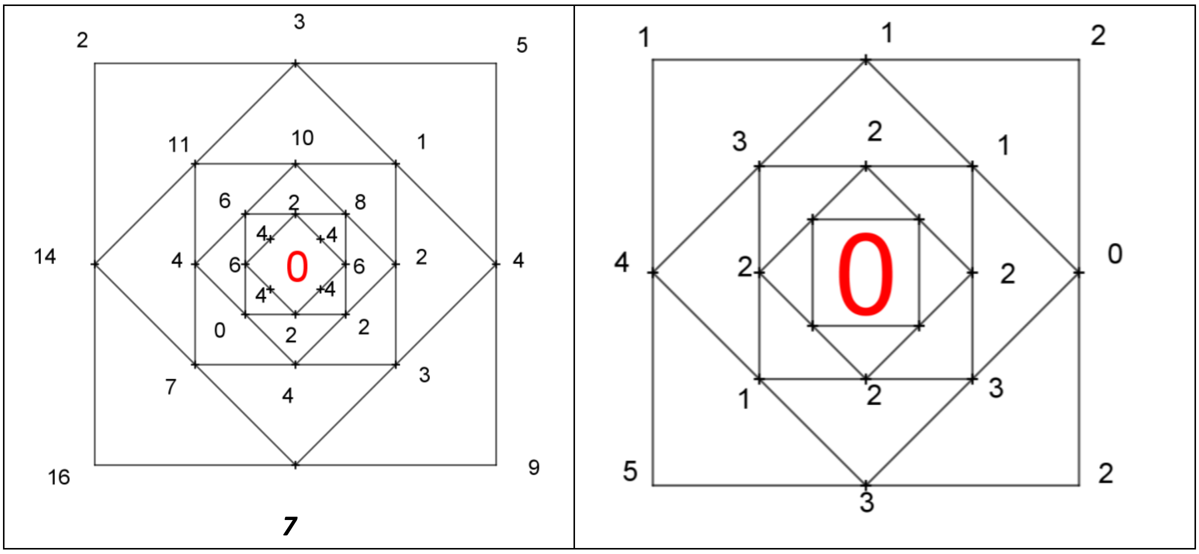


Exercice national 2 : Le jeu des 4 nombres

(À traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Première partie

1.



2.

Une étape	Deux étapes	Trois étapes	Huit étapes
Toute suite de quatre entiers identiques donne quatre zéros à la première étape.	Toute suite (a, b, a, b) donne une suite formée de quatre nombres identiques à la première étape, et quatre zéros à la seconde	Dans le premier exemple, on a vu que $(2, 0, 6, 8)$ donne quatre zéros en trois étapes.	Le premier exemple donne une suite terminant par quatre zéros en sept étapes. On peut la « remonter » en $(1, 3, 8, 17)$ en une suite terminant en huit étapes.

3. Par définition, $Q^{(1)} = (|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|)$

4. Si $(1, 8, 21, 45)$ était le dérivé de (a, b, c, d), on aurait $|a-b| = 1, |b-c| = 8, |c-d| = 21, |d-a| = 45$.
Mais, selon les propriétés de la valeur absolue, $|d-a| = |d-c+c-b+b-a\,| \leq |d-c| + |c-b| + |b-a|$, ce qui donnerait $45 \leq 1 + 8 + 21$, ce qui n'est pas.

5. On place dans cet algorithme un compteur, nommé par exemple « durée » et les quatre nombres a, b, c et d. Une boucle while conditionnée par la non nullité d'au moins un des quatre augmente « durée » d'une unité.

```python
duree_max = 0
for a in range(100):
    for b in range(100):
        for c in range(100) :
            for d in range(100) :
                duree = 0
                at = a
                bt = b
                ct = c
                dt = d
                while not(at==0 and bt==0 and ct==0 and dt==0) :
                    duree +=1
                    e = at
                    f = bt
                    g = ct
                    h = dt
                    at = abs(e-f)
                    bt = abs(f-g)
                    ct = abs(g-h)
                    dt = abs(h-e)
                    if (duree > duree_max):
                        duree_max = duree
                        am=a
                        bm=b
                        cm=c
                        dm=d
print(duree_max)
print(am,bm,cm,dm)
```

Seconde partie

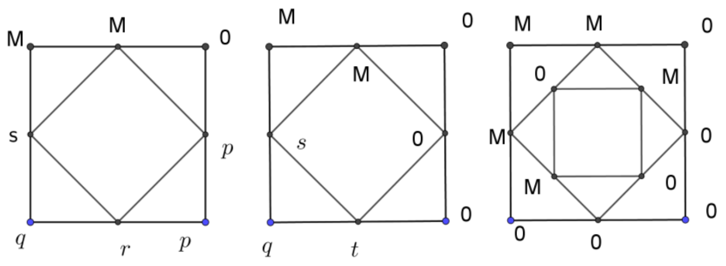
1. *a.* Ou bien les quatre entiers initiaux sont pairs, c'est terminé. Ou bien l'un d'eux est impair et les trois autres pairs, il y a alors deux différences paires successives et deux différences impaires successives (successives dans le mouvement circulaire). À l'étape suivante, pairs et impairs alternent, pour ne donner que des différences impaires et enfin des différences paires. Le cas où au départ deux nombres sont pairs et deux impairs vient d'être évoqué au passage. Enfin, s'il y a au départ un pair et trois impairs, dès la première dérivation on est dans un des cas précédents.

b. La différence entre deux doubles est le double de la différence… Tous les nombres intervenant dans les dérivés successifs sont les doubles de ceux intervenant dans le vol du quadruplet initial. La moitié de 0 étant 0…

2. *a.* Quels que soient les entiers naturels a et b : $|a-b| \leq Max\{a,b\}$, d'où le résultat.

b. Si ce maximum est voisin d'un 0, il reste le maximum à l'étape suivante.

c. Ce qui précède prouve que la suite des $Max(Q^n)$ est décroissante jusqu'au stade où ce maximum est voisin d'un 0. Les schémas ci-dessous montrent que la décroissance stricte vers 0 est réalisée en quelques étapes :



- si le maximum a un voisin nul, ce n'est plus le cas en une étape ;

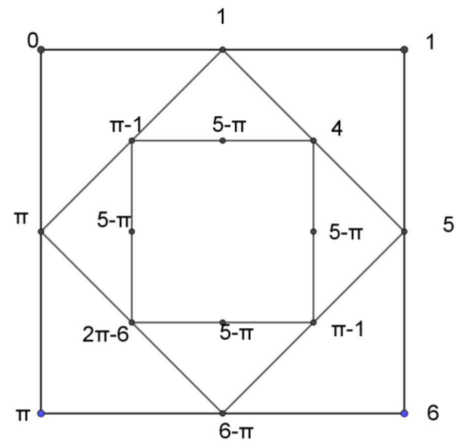
- si les trois autres nombres sont nuls, on parvient à quatre nombres identiques ;

- si deux autres nombres sont nuls, ils sont bientôt réduits à un s'ils sont voisins et produisent en deux étapes quatre nombres identiques s'ils sont de part et d'autre du maximum.

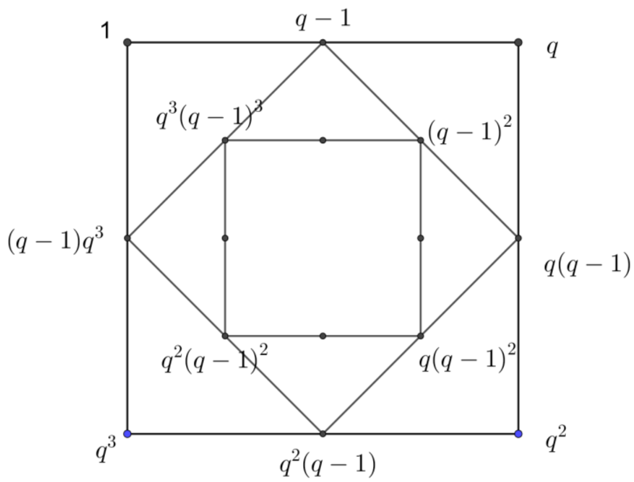
En conclusion, la suite des maximums est une suite d'entiers naturels pour laquelle existe un entier p tel que pour tout entier n $Max\left(Q^{(n+p)}\right) < Max\left(Q^{(n)}\right)$ (l'étude précédente montre que $p \leq 4$). Cette suite est constante égale à 0 au-delà d'un certain rang.

Troisième partie

1. Le quadruplet proposé conduit à $(0,0,0,0)$ comme le prouve le schéma ci-contre.



2. Les premiers calculs font apparaître :



En tenant compte du fait que $1+q+q^2=q^3$. Un raisonnement par récurrence montrerait les quatre nombres apparaissant à l'étape n sont les produits des puissances de q (de 0 à 3) par $(q-1)^n$. On n'obtiendra pas 0.

Exercice national 3 : Les nombres palindromes

(À traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)

Partie A : Généralités

1. ***a.*** Dans le système décimal, les nombres s'écrivant avec deux chiffres identiques sont les palindromes à deux chiffres : 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. **Il y en a neuf**.

b. Les nombres palindromes à trois chiffres, dans ce système, sont constitués de deux chiffres identiques encadrant un chiffre (pas nécessairement différent). Il y en a donc $\mathbf{9 \times 10}$, car il y a dix choix possibles pour le chiffre des dizaines.

c. Un nombre palindrome dont l'écriture comporte 241 chiffres nécessite le choix du 121ème puis le choix des 120 premiers (qui déterminent les 120 derniers). Pour le premier, 0 est interdit, donc il y a 9 possibilités, pour chacun des suivants 10 possibilités. Au total : $9 \times (10 \times 10 \times \dots . \times 10 \times 10) \times 10 = 9 \times 10^{120}$.

2. ***a.*** $N = 11\,111\,211\,111$ est un palindrome à 11 chiffres, $N' = 33\,333\,433\,333$ aussi

b. $M = 111\,112\,211\,111$ est un palindrome à 12 chiffres, $M' = 333\,334\,433\,333$ aussi.

3. On entre l'entier n, et on charge les mémoires a, b, c et d avec $E(\frac{n}{1000})$, $E\left(\frac{(n-1\,000a)}{100}\right)$, $E\left(\frac{n-1\,000a-100b}{10}\right)$ et

$n - 1\,000a - 100b - 10c$. Il s'agit ensuite de comparer a et d et, s'ils sont égaux, b et c. Si la dernière réponse est oui n est un palindrome.

a. L'écart entre 33 333 433 333 et 11 111 211 111 est 22 222 222 222

b. Si on ajoute 11 au nombre $1\,000a + 100b + 10b + a$, on obtient $1\,000a + 100b + 10(b+1) + (a+1)$, ce qui ne peut être l'écriture d'un entier de quatre chiffres palindrome que si le chiffre des milliers est $a+1$, ce qui entraîne que $b + 1 = 10$. Les nombres cherchés s'écrivent donc $a99a$, a pouvant prendre toutes les valeurs de 1 à 8.

c. Si on ajoute 10 au nombre qui s'écrit $abba$, on change le chiffre des dizaines de b en $b+1$, ce qui nécessite que $b = 9$, mais alors le chiffre des milliers passe de a à $a+1$ et on n'a toujours pas de palindrome. Ajouter un nombre inférieur à 10 soit ne provoque qu'un changement de chiffre des unités, adieu le palindrome, soit exige $b = 9$ et le passage du chiffre des milliers à $a+1$. Il faut donc au moins ajouter 11, et on a vu que c'était possible de conserver la qualité de palindrome.

Partie B : Nombres palindromes et divisibilité par 11

1. ***a.*** On considère le nombre $N = 123\,321$. On peut écrire $N = 100\,001 + 2\,002 + 33$

b. Comme $100\,001 = 9\,091 \times 11, 1\,001 = 7 \times 11 \times 13$, on en déduit que N est multiple de 11.

2. ***a.*** À partir de l'identité remarquable donnée, en changeant x en $-x$, on obtient pour tout x et pour tout entier n impair :

$$1 + x^n = (1+x)(1 - x + x^2 - \dots + x^{n-1})$$

Dans le cas particulier qui nous occupe, $n = 2k+1$ et $x = 10$. Le premier facteur du produit est 11.

b. À l'image de ce qui a été fait au **1.** ***a.***, tout palindrome possédant un nombre pair n de chiffres est une « combinaison linéaire » (les coefficients sont des chiffres) des $\left(1 + 10^{2k+1}\right)$ pour les entiers k compris entre 0 et $\frac{n}{2} - 1$. Chacun des $\left(1 + 10^{2k+1}\right)$ est un multiple de 11, d'où le résultat.

c. Il y a bien sûr des multiples de 11 ayant un nombre pair de chiffres qui ne sont pas des palindromes, par exemple $11 \times 123 = 1\,353$.

La dernière question parle de la réciproque d'une propriété du type « si A et B alors C ». Cette réciproque s'écrit :

« si C, alors A et B ». Il y a de grandes chances qu'elle soit fausse. Dans le cas présent, elle l'est.

En revanche, on pourrait réécrire la question : dans l'ensemble des palindromes, ceux qui ont un nombre pair de chiffres sont multiples de 11. On a un « si A, alors C », B décrivant le référentiel de travail. La réciproque s'écrit : « si un palindrome est multiple de 11, alors il a un nombre pair de chiffres ».

Le contre-exemple $11 \times 11 = 121$ *montre qu'on peut être palindrome, multiple de 11 et posséder un nombre impair de chiffres.*