Première Partie : Exercices académiques

La résolution est collective et se fait par équipe de 2 ou 3 élèves.

Chaque équipe rend une seule copie

Exercice académique 1 : Le problème des ficelles

(***À traiter par tous les candidats***)

Une ancienne coutume slave, pour décider du mariage d'une jeune fille, voulait que l'on réalise l'expérience aléatoire suivante.
Trois morceaux de ficelle pliés en deux sont tenus dans la main comme l'indique la « Figure a ».
On noue deux par deux, au hasard, les six extrémités qui dépassent du poing fermé.

Figure a

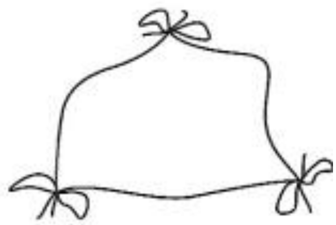


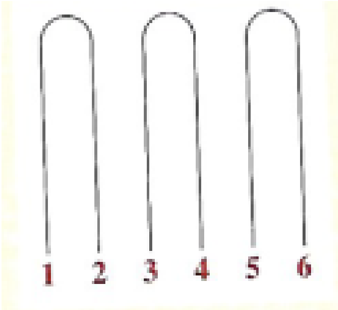
Figure b

On désigne par S l'événement : « Obtenir une boucle fermée à la fin de l'expérience » (Figure b).
Selon la coutume, la jeune fille ne se mariait que lorsque l'événement S se réalisait.

Le but de cet exercice est de déterminer quel est, de S ou $\bar{S}$, l'événement le plus probable.

1. Le modèle

En représentant les morceaux de ficelle comme l'indique la figure ci-contre, l'épreuve consiste alors à associer les nombres deux par deux.
On convient de noter en premier la liaison avec le bout 1.
Un exemple d'issue est : {1 – 6 ; 2 – 3 ; 4 – 5}



- **a.** Cette issue est-elle favorable à la réalisation de l'événement S ?
- **b.** Expliquer pourquoi on peut se contenter de désigner l'issue précédente par : {1 – 6 ; 2 – 3} ?

Dans la suite de l'exercice, une issue sera notée avec deux liaisons.

2. Le calcul

- **a.** Ecrire toutes les issues contenant la liaison « 1 – 2 ».
- **b.** Combien y-a-t-il d'issues possibles ?
- **c.** Calculer la probabilité $p(S)$ et conclure.

Exercice académique 2 : L'étoile céleste

(À traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Première partie : rectangle d'or

On dit que deux rectangles sont semblables lorsque les rapports $\frac{Longueur}{largeur}$ sont égaux.

Sur la figure n° 1 ci-contre, on considère le carré ABCD de côté AB $= \varphi$.

Á l'extérieur de ce carré, on construit le rectangle EFCB avec BE = 1. Le but de cette partie est de déterminer φ de sorte que les rectangles EFCB et EFDA soient semblables.

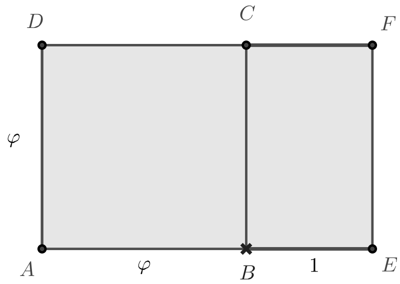


FIGURE 1 – *Les rectangles AEFD et EFCB sont semblables.*

1. Montrer que dans ce cas φ est une solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
2. Résoudre cette équation et déterminer la valeur de φ.

On appelle *rectangle d'or*, tout rectangle dont la longueur L et la largeur l vérifient

$$\frac{L}{l} = \varphi , \qquad \varphi \quad \text{étant le nombre positif tel que} \qquad \varphi^2 = \varphi + 1.$$

3. Montrer que tout agrandissement ou réduction de rapport k d'un rectangle d'or, est encore un rectangle d'or.
4. Le rectangle EFDA est-il un agrandissement du rectangle EFCB ?.

Deuxième partie : l'étoile céleste

Sur la figure 2 ci-contre, les diagonales des deux rectangles d'or, EFDA et EFCB forment une étoile, appelée : étoile céleste.

1. Montrer que $\text{BG} = 1$.
2. En déduire que FCGN est un rectangle d'or.
3. Que vaut le rapport $\frac{\text{AF}}{\text{CE}}$?

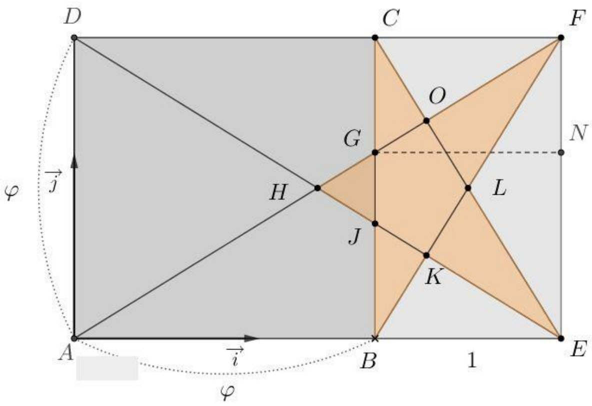


FIGURE 2 – *L'étoile céleste et son pentagone*

On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath}\,)$, avec $\vec{\imath} = \frac{1}{\varphi}\,\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\jmath} = \frac{1}{\varphi}\,\overrightarrow{AD}$.

Ainsi, dans ce repère, on a $B\,(\varphi; 0)$ et $D(0; \varphi)$.

4. Montrer que les droites (AF) et (CE) sont perpendiculaires
5. Déterminer les coordonnées x_O et y_O du point O.

Troisième partie : La spirale d'or

En poursuivant le processus entamé dans la deuxième partie, on construit des rectangles d'or de plus en plus petits comme le montre la figure 3 ci-dessous :

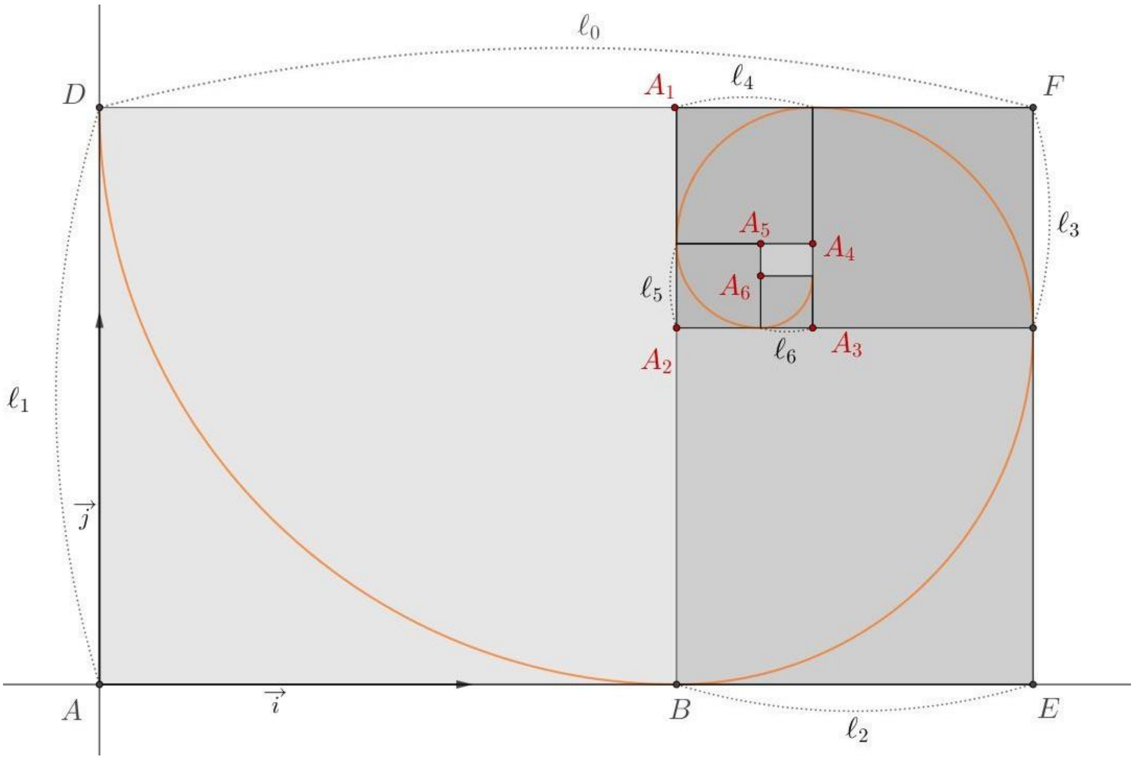


FIGURE 3 – La spirale d'or

Chaque rectangle contient un carré dans lequel on dessine un quart de cercle dont on a représenté les premiers centres : $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6$. L'ensemble de ces arcs forment la spirale d'or. Le but de cette partie est de vérifier numériquement que les centres A_{2n}, pour n entier naturel, $n \geq 1$, se rapprochent du point O. On pose $l_0 = AE = \varphi + 1$; et $l_1 = AD = \varphi$.

De manière générale, on note l_n la longueur du $(n+1)^{ième}$ rectangle.

1. Montrer que la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

En observant la figure 3, on voit que les points A_1 et A_2 ont respectivement pour coordonnées :

$$A_1(l_0 - l_2; l_1) \quad \text{et} \quad A_2\,(l_0 - l_2; l_1 - l_3)$$

2. Déterminer les coordonnées de chacun des points $A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6$. Conjecturer une expression de chacune des coordonnées x_{2n} et y_{2n} du point A_{2n}.
3. On appelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général :

$$u_n = l_0 - l_2 + l_4 + \cdots + (-1)^n l_{2n} \quad . \quad \text{On admet que} \quad l_n = l_0 \times \frac{1}{\varphi^n}$$

4. Écrire un programme sous Python, ou un algorithme en langage naturel qui permet d'afficher les premiers termes de cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Trouver le rang n_0 à partir duquel les coordonnées x_{2n} et y_{2n} du point A_{2n} sont des valeurs approchées respectives des coordonnées x_O et y_O du point O, à 10^{-2}près.

Exercice académique 3 : Résidus des nombres entiers

(À traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)

Un nombre entier est écrit sur la première ligne d'un tableau triangulaire, un chiffre par case. Cette première ligne a donc autant de case que le nombre a de chiffres.

Par exemple pour **2018** la première ligne aura 4 cases comme l'indique le tableau ci-contre.

Le tableau est ensuite rempli ligne par ligne, chacune des cases devant contenir l'écart entre les deux chiffres situés au-dessus. Ainsi dans notre exemple,

l'écart entre 2 et 0 est **2**,

l'écart entre 0 et 1 est **1**,

l'écart entre 1 et 8 est **7**.

On obtient donc **217** sur la deuxième ligne.

2	**0**	**1**	**8**
2	**1**	**7**	

En continuant de la même façon, on obtient le tableau final ci-contre :

Le dernier chiffre obtenu dans le tableau est appelé **résidu**.

On dira donc que le résidu de **2018** est **5**. Ce qui se note : Rés (**2018**) = **5**.

2	**0**	**1**	**8**
2	**1**	**7**	
1	**6**		
5			

1. Déterminer à l'aide des tableaux suivants les résidus de 58, 752, 1492 et 1852.

5	**8**

7	**5**	**2**

1	**4**	**9**	**2**

1	**8**	**5**	**2**

2. Donner deux nombres différents permettant d'obtenir **351** sur la deuxième ligne :

3	**5**	**1**	

3	**5**	**1**	

3. Donner tous les entiers inférieurs à 100 dont le résidu vaut **5**.

4. Combien y a-t-il d'entiers strictement inférieurs à 100 dont le résidu vaut **0** ? Dont le résidu vaut **1** ?

5. Donner tous les entiers inférieurs à 1000 dont le résidu vaut **8**.

6. 9 est le seul entier inférieur à 10 dont le résidu vaut **9**.

- **a.** Combien y a-t-il d'entiers inférieurs à 100 dont le résidu vaut **9** ?
- **b.** Combien y a-t-il d'entiers inférieurs à 1000 dont le résidu vaut **9** ?
- **c.** Proposer une formule qui donne le nombre d'entiers inférieurs à 10^n (n entier naturel non nul) dont le résidu vaut **9**.

  On expliquera soigneusement la démarche ayant permis d'arriver à cette formule.
- **d.** Si on dressait la liste, dans l'ordre croissant, des 50 premiers entiers ayant pour résidu **9**, combien de chiffres aurait le dernier nombre de la liste ?